Оглавление

Глава 1

Трицератопсы (10-2)

Олимпиада

1. В некоторой стране суммарная зарплата 10% самых высокооплачиваемых работников составляет 90% зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

2. При каком наименьшем натуральном n число 2015! не делится на n^n?

3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно, а на отрезке AN выбрана точка Q так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

4. В конечной последовательности, состоящей из натуральных чисел, встречается ровно 2015 различных чисел. Известно, что если из какого-нибудь члена этой последовательности вычесть 1, то в полученной последовательности тоже будет встречаться не менее 2015 различных чисел. Найдите минимальную возможную сумму членов исходной последовательности.

5. Натуральные числа x и y таковы, что $(2x^2 - 1) = y^{15}$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5.

6. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.

source:olympiad/g10-intro.tex

Неравенство Коши–Буняковского

Для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедливо *неравенство Коши–Буняковского:*

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right),$$

причем если не все y_k равны нулю, то равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ (здесь наличие нуля в знаменателе означает, что над ним в числителе также стоит ноль).

1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r — положительные числа, причем числа p_i в сумме равны 1. Докажите неравенство
$\left(p_1x_1^r + p_2x_2^r + \ldots + p_nx_n^r\right)^2 \leqslant p_1x_1^{2r} + p_2x_2^{2r} + \ldots + p_nx_n^{2r}$.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$. Докажите, что

(a) $\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) \cdot \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant \left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2$;

(b) $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

3. Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство
$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(\frac{1}{x_1^2 + x_1x_2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n^2 + x_nx_1}\right) \geqslant \frac{n^2}{2}$.

4. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите неравенство
$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2}$.

5. Для положительных a, b и c докажите неравенство
$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$.

6. Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сумма которых равна 1, докажите неравенство
$\frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{2-x_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}$.

source:algebra/inequality/cauchy-schwarz-g10/r2.tex

Разминка

1. Сумма положительных чисел x, y и z равна 11. Докажите неравенства
(a) $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geqslant 243$; **(b)** $x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 81$.

2. Для произвольных вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{17}$ докажите неравенства
(a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geqslant x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$;
(b) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{17}^2 \geqslant 1/2 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + \ldots + x_{17})$.

3. Для любых вещественных чисел x, y и z докажите неравенство
$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$.

4. Для вещественных чисел x, y и z, принадлежащих отрезку $[0; 1]$ докажите неравенства
(a) $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) \leqslant 1$;
(b) $2(xy + yz + zx) \leqslant 3xyz + x + y + z$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^2y + y^2z + z^2x + 1$;
(d) $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leqslant 3$.

5. **(a)** Для любых вещественных чисел a и b докажите неравенство
$a^{2^n} + b^{2^n} + n \geqslant (ab)^{2^{n-1}} + (ab)^{2^{n-2}} + \ldots + ab + a + b$.
(b) Вещественные числа a и b лежат по одну сторону от 1. Докажите неравенство
$(ab)^{2^{n-1}} + 2^n \geqslant 2^{n-1}(a + b) + 1$.

6. Вещественные числа a, b и c удовлетворяют условиям $abc = 1$ и $a^3 > 36$. Докажите неравенство
$a^2/3 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

source:algebra/inequality/mixture-g10-1.tex

Применяем полученные знания

1. Для любых натуральных чисел $k \leqslant n$ докажите, что

$$\textbf{(a)} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1+\frac{k}{n}+\frac{(k-1)^2}{n^2}\,; \qquad \textbf{(b)} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{n+1}{n+1-k}\,.$$

2. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} \leqslant n-1\,.$$

3. Для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$ докажите неравенство

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

4. Для любых вещественных чисел x, y и z докажите, что

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}\,.$$

5. Для положительных чисел a, b, c и d докажите, что

$$\textbf{(a)} \quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\,; \qquad \textbf{(b)} \quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2\,.$$

source:algebra/inequality/mixture-g10-2/r2.tex

Китайская теорема об остатках

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые натуральные числа.
Китайская теорема об остатках утверждает, что для любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое натуральное x, что $x \equiv a_i \pmod{m_i}$. Более того, такое x единственное с точностью до добавления кратного $M = m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. **(a)** Докажите, что для любых взаимно простых a и b существует такое число x, делящееся на a и дающее остаток 1 при делении на b.
(b) Докажите Китайскую теорему об остатках.

2. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

3. Многочлен с целыми коэффициентами при некоторых целых значениях аргумента делится на 1001, а при некоторых целых значениях аргумента делится на 1000. Докажите, что при некоторых значениях аргумента значение многочлена делится на 1 001 000.

4. Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что для любого натурального N в этой прогрессии можно найти N составных чисел, идущих подряд.

5. Докажите, что существуют 18 последовательных натуральных чисел, среди которых нет числа, взаимно простого с остальными.

6. Существует ли такое 2000-значное составное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку цифр остается составным?

7. Для каких натуральных $n > 1$ существуют натуральные $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (не все из которых равны) такие, что для любого натурального k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ является точной степенью? (Показатель может зависеть от k но всегда быть больше 1.)

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g10/r2.tex

Остатки и показатели

1. Существуют ли такие натуральные a и b, что $a^2 + 2b^2 = 1001$?
2. Докажите, что число $m^3 + n^3 + 4$ не может быть точным кубом.
3. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 + 5$ не может быть точной пятой степенью.
4. Решите в натуральных числах уравнение $7^m - 2^n = 3$.
5. Решите в натуральных числах уравнение $5^x = 2^x + 1$.
6. Решите в натуральных числах уравнение $7^x = 2^y 3^z + 1$.

Напоминание. Пусть a и n — взаимно простые натуральные числа. Тогда *показателем a по модулю d* называется наименьшее натуральное d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

7. Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
8. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $(7^p - 2^p) \cdot (7^q - 2^q)$ делится на pq.
9. Докажите, что $(2^n - 1)$ не делится на n, если $n > 1$.

source:algebra/number-theory/mixture-g10/r2.tex

Китайская теорема об остатках для многочленов. Интерполяция

1. *(воспоминания о вчерашнем)* Найдите все такие целые n, что $n \equiv 17 \pmod{54}$, $n \equiv 15 \pmod{80}$ и $n \equiv 65 \pmod{75}$.

2. Многочлен $P(x)$ дает остаток $2x+1$ при делении на при делении на x^2+x+1 и остаток $3x-1$ при делении на x^2-x+1. Какой остаток дает многочлен $P(x)$ при делении на x^4+x^2+1?

3. Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ взаимно простые. Для произвольных многочленов $h(x)$ и $g(x)$ докажите, что существует такой многочлен $f(x)$, что $f(x)-h(x)$ делится на $P(x)$, а $f(x)-g(x)$ делится на $Q(x)$.

Пусть даны два набора чисел: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$, причем в первом наборе все числа различны. Тогда требуется найти многочлен F степени не выше k такой, что $F(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$.

4. **(a)** Докажите, что при $k = n$ решения либо нет вовсе, либо оно единственное.
(b) Докажите, что при $k > n$ решения либо нет вовсе, либо их бесконечно много.

Будем доказывать, что решение существует.

5. **(a)** Пусть многочлен $g_k(x)$ степени n равен 0 при всех x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), кроме x_k. Докажите, что

$$g_k(x) = c \cdot \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} (x - x_i)\,.$$

(b) Чему должна быть равна константа c, чтобы $g_k(x_k)$ было равно 1?
(c) **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Докажите, что искомый многочлен $f(x)$ равен

$$\sum_{k=0}^{n}\left(y_k \cdot \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\big(y_k \cdot g_k(x)\big)\,.$$

6. Многочлен $f(x)$ степени n принимает в целых точках целые значения. Докажите, что
(a) все его коэффициенты рациональны;
(b) знаменатели всех коэффициентов делят $n!$.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют тождеству $x^{2013} = (x^3-6x+11x-6)\cdot P(x) + Q(x)$, причем степень многочлена $Q(x)$ меньше 3. Найдите многочлен $Q(x)$.

8. Для любых различных a, b, c, d, e докажите, что

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{(e-b)(e-c)(e-d)}+\frac{(a-b)(a-c)(a-e)}{(d-b)(d-c)(d-e)}+$$
$$+\frac{(a-b)(a-d)(a-e)}{(c-b)(c-d)(c-e)}+\frac{(a-c)(a-d)(a-e)}{(b-c)(b-d)(b-e)}=1\,.$$

source:algebra/polynomial/interpolation-g10/r2.tex

Разнобой-повторение

1. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

2. **(a)** Для любых четырех точек на плоскости докажите равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 .$$

(b) Выведите из этого, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3. Дан набор из n векторов, $n > 2$. Назовем вектор набора длинным, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю.

4. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

5. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На продолжениях сторон AB и AC выбраны точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает отрезок DE в точке F. Докажите, что AF — биссектриса угла BAC.

6. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N (точки M и N отличны от точки C). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

7. Найдите сумму $\sin(9^\circ) + \sin(49^\circ) + \sin(89^\circ) + \ldots + \sin(329^\circ)$.

8. Дано 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.

9. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

source:geometry/mixture-g10.tex

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какой-то момент они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A. Докажите, что они либо все время от нее равноудалены, либо этого больше никогда не произойдет.

2. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B. Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

5. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

8. Из точки пересечения A двух окружностей одновременно с одинаковыми угловыми скоростями стартовали два велосипедиста, оба против часовой стрелки. Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется по окружности.

source:geometry/moving-points-g10/r2.tex

Повороты и клады

1. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 и BCC_1B_2. Точка X — середина отрезка B_1B_2. Докажите, что
(a) $2BX = AC$; **(b)** $BX \perp AC$.

2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABO_1, BCO_2, CDO_3 и DAO_4. Докажите, что если $O_1 = O_3$, то $O_2 = O_4$.

3. Диагональ AC является осью симметрии выпуклого четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим два правильных треугольника ABK и BCM (точка K с той же стороны от AB, что и точка C, точка M расположена по другую сторону от BC, чем точка A). Докажите, что точки D, K и M лежат на одной прямой.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

5. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, $C'AB$ — внутренним, M — центр треугольника $C'AB$. Докажите, что треугольник $A'B'M$ равнобедренный, причем $\angle A'MB' = 120°$.

6. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами M, N, P, Q. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ образуют квадрат.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, которая повторно пересекает первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (точка A лежит между C и D). Точки K и L — середины дуг CB и DB, не содержащих точку A, а M — середина отрезка CD. Докажите, что $\angle KML = 90°$.

9. Инструкция по отысканию клада гласит:

> Для того, чтобы найти клад, нужно стать под березой лицом к прямой линии, соединяющей дуб и сосну. При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем нужно пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку. Затем следует вернуться к березе и пойти от нее к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку. Клад зарыт точно посредине между вешками.

Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что дуб и сосна налицо, а от березы не осталось и следа. Как найти клад за наименьшее число попыток?

10. Инструкция по отысканию клада гласит:

> Для того, чтобы найти клад, нужно встать под пальмой с номером «1», лицом к пальме с номером «2». Затем нужно пройти ровно половину расстояния до пальмы с номером «2» и повернуться лицом к пальме с номером «3». Затем нужно пройти ровно треть расстояния до пальмы с номером «3» и повернуться лицом к пальме с номером «4». И так далее. На k-ом этапе нужно пройти ровно $1/(k+1)$ расстояния до пальмы с номером «$k+1$» и повернуться лицом к пальме с номером «$k+2$». На последнем этапе нужно пройти ровно $1/2015$ расстояния до пальмы с номером «2015». Если все сделано правильно,то на глубине двух метров точно под тобой будет клад.

Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что на всех 2015 пальмах стерлись номера. За какое наименьшее число попыток он заведомо найдет клад?

source:geometry/rotation-composition.tex

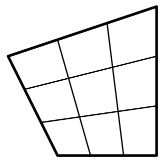
Про стрелочки

1. Докажите, что если векторы $(\vec{a}+\vec{c})$ и $(\vec{a}-\vec{c})$ перпендикулярны, то $|\vec{a}| = |\vec{c}|$.

2. На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\vec{0}$?

3. **(a)** Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину.
(b) У выпуклого пятиугольника отметили середины сторон, а потом стерли все, кроме отмеченных точек. Восстановите пятиугольник.

4. Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединены естественным образом. Докажите, что
(a) каждый из полученных отрезков также разбивается точками пересечения на три равные части;
(b) площадь среднего четыреухгольника в девять раз меньше площади исходного.



5. На плоскости дано 2015 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 2014 векторов коллинеарна с вектором, не включенном в сумму. Докажите, что сумма всех векторов равна нулевому вектору.

6. На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие — местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное — M. Найдите расстояние между центрами этих часов.

7. Середины противолежащих сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

8. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$ (в нем суммы чисел во всех строках и столбцах равны), центры любых двух клеток соединили вектором по направлению от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех этих векторов равна нулю.

source:geometry/vectors-g10.tex

Упорядочивание-2

1. На плоскости отмечено 600 точек общего положения. Докажите, что их можно покрасить в 200 цветов так, чтобы никакие два отрезка, соединяющие точки одного цвета, не пересекались во внутренних точках.

2. Есть $2n$ натуральных чисел, не превосходящих n^2. Докажите, что среди их попарных разностей есть хотя бы 3 одинаковых.

3. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

4. Пусть $f(n)$ — количество несократимых дробей из полуинтервала $[0; 1)$ со знаменателем, не превосходящим n. Например, $f(3) = 4$ и $f(4) = 6$. Докажите для любого n неравенство $f(2n) \geqslant 2f(n)$.

source:combinatorics/arrangement-g10/more.tex

Упорядочивание

1. Дано 2017 чисел. Известно, что сумма любых четырех чисел положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

2. Солдаты построены в две шеренги по n человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги.

3. Наименьшее из n различных натуральных чисел равно a. Докажите, что их НОК не меньше na.

4. При каком наибольшем n существуют n палочек таких, что из любых трех можно сложить тупоугольный треугольник?

5. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

6. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призеров конкурса?

7. Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

8. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы в одной из строк.

source:combinatorics/arrangement-g10/r2.tex

Подсчёт на бесконечности, выделение конечного куска

0. *(разобрана)* Во всех клетках бесконечной доски, кроме тех, обе координаты которых делятся на 100, стоит по фишке. Каждую фишку сдвинули на расстояние, не большее 10 000. Докажите, что хотя бы одна клетка пустая.

1. **(a)** Из бесконечной клетчатой доски вырезали некоторые клетки так, что любые три вырезанные клетки лежат не менее, чем в трех вертикальных столбцах. Докажите, что оставшуюся доску можно разрезать на доминошки.
(b) Верно ли то же самое, если известно только то, что в любом квадрате 100×100 лежит не более одной вырезанной клетки?

2. Даны n арифметических прогрессий с разностями $d_1, \dots, d_n$. Докажите, что если $d_1 + \dots + d_n < 1$, то существует число, не принадлежащее ни одной прогрессии.

3. Докажите, что существует число, большее 1 000 000, которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба.

4. Докажите, что существует бесконечное число натуральных чисел, не представимых в виде суммы десяти десятых степеней.

5. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 100 500 цифр? Цифры можно вписывать в любые места.

6. Плоскость разбита на равные многоугольники так, что внутри каждого многоугольника ровно одна точка с целыми координатами (а на границах многоугольников целых точек нет). Докажите, что площади многоугольников равны 1.

7. Докажите, что в отрезке $[0; 1]$ все точки, в десятичной записи которых нет цифры 8, можно покрыть отрезками с суммарной длиной меньше 0,001.

source:combinatorics/asymptotic-g10/r2.tex

Принцип крайнего

1. Докажите, что никакой выпуклый многоугольник нельзя разрезать на 100 различных правильных треугольников.
2. На плоскости нарисованы два непересекающихся выпуклых многоугольника. Докажите, что можно провести прямую так, что многоугольники окажутся в разных полуплоскостях.
3. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $(2n-3)$ различных точек.
4. Докажите, что любой выпуклый многоугольник Φ содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2, подобных Φ с коэффициентом $1/2$.
5. По кругу записаны действительные числа. В промежутках между соседними числами написали их средние арифметические, а сами числа стерли. Получился такой же набор чисел. Докажите, что все числа изначально были равны.
6. Существуют ли такие простые числа p_1, p_2, p_{2015}, что (p_1^2-1) делится на p_2, (p_2^2-1) делится на p_3, …, (p_{2015}^2-1) делится на p_1?
7. Докажите, что ни при каком $n>1$ число $1+1/2+1/3+\ldots+1/n$ не является целым.
8. В графе 200 вершин и степень каждой вершины не меньше 100. Докажите, что существует замкнутый путь, проходящий по всем вершинам по одному разу.
9. На прямой имеется $2n+1$ отрезок, причем каждый отрезок пересекается как минимум с k другими отрезками. Докажите, что некоторый отрезок пересекается со всеми остальными.
10. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

source:combinatorics/extreme-principle-g10/r2.tex

Применение графов в сельском хозяйстве

1. Назовем раскраску вершин данного дерева T в три цвета *правильной,* если любые две соединенные ребром вершины имеют разный цвет. Рассмотрим граф, вершины которого есть все правильные раскраски T, и две раскраски соединены ребром, если они различаются ровно в одной вершине. Докажите, что этот граф — связный.

2. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.
(a) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.
(b) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

3. Даны 9 чисел a_1, ..., a_9. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1$, ..., $2a_9$ — целые.

4. Связная клетчатая фигура состоит из 1001 клетки. Какое в ней может быть максимальное количество белых клеток?

5. Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовем пару цветов *хорошей,* если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

6. На плоскости расположено 50 попарно непересекающихся кругов. Пару кругов назовем *хорошей,* если можно выбрать по точке с каждого круга так, чтобы отрезок, их соединяющий, не пересекал бы других кругов. Какое наименьшее количество хороших пар?

7. Дан клетчатый квадрат 20×20. M его клеток окрашены в черный цвет, остальные в белый. Если в какой-то момент 3 из 4-х клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в черный цвет, то через минуту и четвертая клетка тоже перекрашивается в черный. При каком наименьшем M может так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет черным?

8. Прямоугольный дачный кооператив разделен M горизонтальными и N вертикальными границами на $(M+1) \times (N+1)$ прямоугольных участков. Сотрудник земельного ведомства хочет выяснить площадь кооператива. Для этого он может только спрашивать у каких-то владельцев участков, чему равна площадь их участка. Какого наименьшего числа вопросов ему хватит?

9. На плоскости нарисованы n кругов, которые попарно не пересекаются (но могут касаться). Точки касания отмечены красным цветом. Докажите, что отмечено не более $(3n-6)$ красных точек.

10. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более

99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

11. В прямоугольной таблице расставлены действительные, но нецелые числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Докажите, что можно округлить каждое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась.

12. Дано натуральное число $n > 1$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

13. Можно ли расставить по кругу 1024 нуля или единицы так, чтобы любая последовательность из нулей и единиц длины 10 встречалась среди 10 соседних цифр?

source:combinatorics/graph/hidden-g10/r2.tex

Графы и раскраски

1. **(a)** В графе степень каждой вершины меньше k. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в k цветов.
   (b) В связном графе 2015 вершин и стпень каждой не превосходит 17. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в 17 цветов.

2. В графе нет простого пути длины 10. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в 10 цветов. (*Простым* называется путь, все вершины которого различны.)

3. В выпуклом многоугольнике провели нескольно диагоналей, диагонали не пересекаются во внутренних точках. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы никакие две одноцветные вершины не были соединены отрезком.

4. На плоскости отметили несколько точек и провели несколько отрезков между ними так, что никакие два отрезка не пересекаются по внутренней точке. Докажите, что можно покрасить точки в 6 цветов так, что никакие две точки одного цвета не будут соединены отрезком.

5. Пусть в графе v вершин и r ребер, а его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geqslant v^2/(v^2 - 2r)$.

6. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $1/n$ часть его ребер так, чтобы вершины оставшегося графа можно было покрасить правильным образов в n цветов.

7. В какое наименьшее число цветов можно покрасить ребра полного графа на 1000 вершинах так, чтобы граф на ребрах каждого цвета был бы несвязным?

8. Можно ли ребра полного графа на n вершинах покрасить в несколько цветов так, чтобы ребра каждого цвета образовывали треугольник, если
   (a) $n = 7$; **(b)** $n = 8$; **(c)** $n = 9$?

9. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 2011-угольника, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:
   (1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин;
   (2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков?

10. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?

source:combinatorics/graph/painting-g10/r2.tex

Глава 2

Диплодоки (10-1)

Олимпиада

1. В некоторой стране суммарная зарплата 10% самых высокооплачиваемых работников составляет 90% зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

2. При каком наименьшем натуральном n число 2015! не делится на n^n?

3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно, а на отрезке AN выбрана точка Q так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

4. В конечной последовательности, состоящей из натуральных чисел, встречается ровно 2015 различных чисел. Известно, что если из какого-нибудь члена этой последовательности вычесть 1, то в полученной последовательности тоже будет встречаться не менее 2015 различных чисел. Найдите минимальную возможную сумму членов исходной последовательности.

5. Натуральные числа x и y таковы, что $(2x^2 - 1) = y^{15}$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5.

6. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.

source:olympiad/g10-intro.tex

Неравенство Коши–Буняковского

Для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедливо *неравенство Коши–Буняковского:*

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right),$$

причем если не все y_k равны нулю, то равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ (здесь наличие нуля в знаменателе означает, что над ним в числителе также стоит ноль).

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$. Докажите, что

(a) $\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) \cdot \left(\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n}\right) \geqslant \left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2$;

(b) $\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n^2}{b_n} \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

2. Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(\frac{1}{x_1^2 + x_1x_2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n^2 + x_nx_1}\right) \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

3. Для положительных a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

4. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите, что

(a) $\dfrac{1}{a^3(b + c)} + \dfrac{1}{b^3(c + a)} + \dfrac{1}{c^3(a + b)} \geqslant \dfrac{3}{2}$;

(b) $\dfrac{1}{a(a + 1)} + \dfrac{1}{b(b + 1)} + \dfrac{1}{c(c + 1)} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

5. Сумма вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 0. Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее из этих чисел. Докажите неравенства

(a) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant -nmM$;

(b) $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \leqslant -nmM(m^2 + mM + M^2)$.

source:algebra/inequality/cauchy-schwarz-g10/r1.tex

Разминка

1. Сумма положительных чисел x, y и z равна 11. Докажите неравенства
(a) $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geqslant 243$; **(b)** $x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 81$.

2. Для произвольных вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{17}$ докажите неравенства
(a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geqslant x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$;
(b) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{17}^2 \geqslant 1/2 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + \ldots + x_{17})$.

3. Для любых вещественных чисел x, y и z докажите неравенство
$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$.

4. Для вещественных чисел x, y и z, принадлежащих отрезку $[0; 1]$ докажите неравенства
(a) $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) \leqslant 1$;
(b) $2(xy + yz + zx) \leqslant 3xyz + x + y + z$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^2y + y^2z + z^2x + 1$;
(d) $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leqslant 3$.

5. **(a)** Для любых вещественных чисел a и b докажите неравенство
$a^{2^n} + b^{2^n} + n \geqslant (ab)^{2^{n-1}} + (ab)^{2^{n-2}} + \ldots + ab + a + b$.
(b) Вещественные числа a и b лежат по одну сторону от 1. Докажите неравенство
$(ab)^{2^{n-1}} + 2^n \geqslant 2^{n-1}(a + b) + 1$.

6. Вещественные числа a, b и c удовлетворяют условиям $abc = 1$ и $a^3 > 36$. Докажите неравенство
$a^2/3 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

source:algebra/inequality/mixture-g10-1.tex

Продолжаем в том же духе

1. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leqslant n - 1\,.$$

2. Для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$ докажите неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

3. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n}{2}$$

при **(a)** $n = 3$; **(b)** $n = 4$; **(c)** $n = 5$; **(d)** $n = 6$;
(e) для любых положительных чисел, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

4. Для неотрицательных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ca} + \frac{c}{1 + ab} \geqslant \frac{9}{10}\,.$$

source:algebra/inequality/mixture-g10-2/r1.tex

Китайская теорема об остатках

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые натуральные числа.
Китайская теорема об остатках утверждает, что для любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое натуральное x, что $x \equiv a_i \pmod{m_i}$. Более того, такое x единственное с точностью до добавления кратного $M = m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. Докажите Китайскую теорему об остатках.

2. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

3. Многочлен с целыми коэффициентами при некоторых целых значениях аргумента делится на 1001, а при некоторых целых значениях аргумента делится на 1000. Докажите, что при некоторых значениях аргумента значение многочлена делится на 1 001 000.

4. Докажите, что существуют 18 последовательных натуральных чисел, среди которых нет числа, взаимно простого с остальными.

5. Существует ли такое 2000-значное составное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку цифр остается составным?

6. Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что для любого натурального N в этой прогрессии можно найти N составных чисел, идущих подряд.

7. Для каких натуральных $n > 1$ существуют натуральные $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (не все из которых равны) такие, что для любого натурального k число $(b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k)$ является точной степенью? (Показатель может зависеть от k но всегда быть больше 1.)

8. Число называется *плохим,* если не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Число называется *хорошим,* если делится на 2 или больше из этих чисел. Какое наибольшее количество плохих чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых двух их них была хорошим числом?

9. Пусть n — натуральное число, которого ровно k различых простых делителей.
(a) Сколько существует попарно несравнимых по модулю n таких целых a, что (a^2-a) делится на n?
(b) Докажите, что существует натуральное a, $1 < a < n/k + 10$, такое что $(a^2 - a)$ делится на n.

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g10/r1.tex

Остатки и показатели

1. Существуют ли такие натуральные a и b, что $a^2 + 2b^2 = 1001$?
2. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 + 5$ не может быть точной пятой степенью.
3. Решите в натуральных числах уравнение $7^m - 2^n = 3$.
4. Решите в натуральных числах уравнение $5^x = 2^x + 1$.
5. Решите в натуральных числах уравнение $7^x = 2^y 3^z + 1$.

Напоминание. Пусть a и n — взаимно простые натуральные числа. Тогда *показателем a по модулю d* называется наименьшее натуральное d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

6. **(a)** Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k}+1$ имеет вид $2^{k+1}x+1$.
   (b) Докажите, что если $a^4 + b^4$ делится на 101, то a и b делятся на 101.
   (c) Числа $(16a+15b)$ и $(15a-16b)$ являются полными квадратами. Какое наименьшее значение может принимать число $(15a - 16b)$?
7. Пусть p, q — простые числа, большие 5. Оказалось, что $2^p + 3^p$ делятся на q. Докажите, что $(q - 1)$ делится на $2p$.
8. Докажите, что $(2^n - 1)$ не делится на n, если $n > 1$.
9. Какие остатки могут принимать степени двойки при делении на 3^{2015}?

source:algebra/number-theory/mixture-g10/r1.tex

Китайская теорема об остатках для многочленов. Интерполяция

1. *(воспоминания о вчерашнем)* Найдите все такие целые n, что $n \equiv 17 \pmod{54}$, $n \equiv 15 \pmod{80}$ и $n \equiv 65 \pmod{75}$.

2. Многочлен $P(x)$ дает остаток $2x+1$ при делении на при делении на x^2+x+1 и остаток $3x-1$ при делении на x^2-x+1. Какой остаток дает многочлен $P(x)$ при делении на x^4+x^2+1?

3. Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ взаимно простые. Для произвольных многочленов $h(x)$ и $g(x)$ докажите, что существует такой многочлен $f(x)$, что $f(x)-h(x)$ делится на $P(x)$, а $f(x)-g(x)$ делится на $Q(x)$.

Пусть даны два набора чисел: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$, причем в первом наборе все числа различны. Тогда требуется найти многочлен F степени не выше k такой, что $F(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$.

4. **(a)** Докажите, что при $k = n$ решения либо нет вовсе, либо оно единственное.
(b) Докажите, что при $k > n$ решения либо нет вовсе, либо их бесконечно много.

Будем доказывать, что решение существует.

5. **(a)** Пусть многочлен $g_k(x)$ степени n равен 0 при всех x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), кроме x_k. Докажите, что

$$g_k(x) = c \cdot \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} (x - x_i)\,.$$

(b) Чему должна быть равна константа c, чтобы $g_k(x_k)$ было равно 1?
(c) **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Докажите, что искомый многочлен $f(x)$ равен

$$\sum_{k=0}^{n}\left(y_k \cdot \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right) = \sum_{k=0}^{n}\big(y_k \cdot g_k(x)\big)\,.$$

6. Многочлен $f(x)$ степени n принимает в целых точках целые значения. Докажите, что
(a) все его коэффициенты рациональны;
(b) знаменатели всех коэффициентов делят $n!$.

7. Для любых различных a, b, c, d, e докажите, что

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{(e-b)(e-c)(e-d)} + \frac{(a-b)(a-c)(a-e)}{(d-b)(d-c)(d-e)} + \\ + \frac{(a-b)(a-d)(a-e)}{(c-b)(c-d)(c-e)} + \frac{(a-c)(a-d)(a-e)}{(b-c)(b-d)(b-e)} = 1\,.$$

8. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют тождеству $x^{2013} = (x^3 - 6x + 11x - 6) \cdot P(x) + Q(x)$, причем степень многочлена $Q(x)$ меньше 3.

(a) Найдите многочлен $Q(x)$.

(b) *(немного в сторону, но тоже важно)* Докажите, что у многочлена $P(x)$ все коэффициенты положительные.

9. Функция $f(x)$ при целых x принимает целые значения. Оказалось, что для любого простого p существует такой многочлен $Q_p(x)$ с целыми коэффицентами степени не выше 2013, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Докажите, что существует такой многочлен $g(x)$ с рациональными коэффициентами, что $f(n) = g(n)$ при любом натуральном n.

source:algebra/polynomial/interpolation-g10/r1.tex

Разнобой-повторение

1. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

2. **(a)** Для любых четырех точек на плоскости докажите равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 .$$

   (b) Выведите из этого, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3. Дан набор из n векторов, $n > 2$. Назовем вектор набора длинным, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю.

4. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

5. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На продолжениях сторон AB и AC выбраны точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает отрезок DE в точке F. Докажите, что AF — биссектриса угла BAC.

6. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N (точки M и N отличны от точки C). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

7. Найдите сумму $\sin(9^\circ) + \sin(49^\circ) + \sin(89^\circ) + \ldots + \sin(329^\circ)$.

8. Дано 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.

9. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

source:geometry/mixture-g10.tex

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какой-то момент они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A. Докажите, что они либо все время от нее равноудалены, либо этого больше никогда не произойдет.

2. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B. Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

4. Даны два правильных семиугольника с общей вершиной. Вершины каждого семиугольника нумеруются цифрами от 1 до 7 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные шесть прямых пересекаются в одной точке.

5. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

8. Из точки пересечения A двух окружностей одновременно с одинаковыми угловыми скоростями стартовали два велосипедиста, оба против часовой стрелки. Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется по окружности.

`source:geometry/moving-points-g10/r1.tex`

Повороты и клады

1. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 и BCC_1B_2. Точка X — середина отрезка B_1B_2. Докажите, что
(a) $2BX = AC$; **(b)** $BX \perp AC$.

2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABO_1, BCO_2, CDO_3 и DAO_4. Докажите, что если $O_1 = O_3$, то $O_2 = O_4$.

3. Диагональ AC является осью симметрии выпуклого четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим два правильных треугольника ABK и BCM (точка K с той же стороны от AB, что и точка C, точка M расположена по другую сторону от BC, чем точка A). Докажите, что точки D, K и M лежат на одной прямой.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

5. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, $C'AB$ — внутренним, M — центр треугольника $C'AB$. Докажите, что треугольник $A'B'M$ равнобедренный, причем $\angle A'MB' = 120°$.

6. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами M, N, P, Q. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ образуют квадрат.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, которая повторно пересекает первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (точка A лежит между C и D). Точки K и L — середины дуг CB и DB, не содержащих точку A, а M — середина отрезка CD. Докажите, что $\angle KML = 90°$.

9. Инструкция по отысканию клада гласит:

> Для того, чтобы найти клад, нужно стать под березой лицом к прямой линии, соединяющей дуб и сосну. При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем нужно пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку. Затем следует вернуться к березе и пойти от нее к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку. Клад зарыт точно посредине между вешками.

Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что дуб и сосна налицо, а от березы не осталось и следа. Как найти клад за наименьшее число попыток?

10. Инструкция по отысканию клада гласит:

> Для того, чтобы найти клад, нужно встать под пальмой с номером «1», лицом к пальме с номером «2». Затем нужно пройти ровно половину расстояния до пальмы с номером «2» и повернуться лицом к пальме с номером «3». Затем нужно пройти ровно треть расстояния до пальмы с номером «3» и повернуться лицом к пальме с номером «4». И так далее. На k-ом этапе нужно пройти ровно $1/(k+1)$ расстояния до пальмы с номером «$k+1$» и повернуться лицом к пальме с номером «$k+2$». На последнем этапе нужно пройти ровно $1/2015$ расстояния до пальмы с номером «2015». Если все сделано правильно,то на глубине двух метров точно под тобой будет клад.

Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что на всех 2015 пальмах стерлись номера. За какое наименьшее число попыток он заведомо найдет клад?

source:geometry/rotation-composition.tex

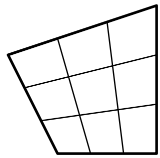
Про стрелочки

1. Докажите, что если векторы $(\vec{a}+\vec{c})$ и $(\vec{a}-\vec{c})$ перпендикулярны, то $|\vec{a}|=|\vec{c}|$.

2. На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\vec{0}$?

3. **(a)** Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину.
(b) У выпуклого пятиугольника отметили середины сторон, а потом стерли все, кроме отмеченных точек. Восстановите пятиугольник.

4. Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединены естественным образом. Докажите, что
(a) каждый из полученных отрезков также разбивается точками пересечения на три равные части;
(b) площадь среднего четыреухгольника в девять раз меньше площади исходного.



5. На плоскости дано 2015 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 2014 векторов коллинеарна с вектором, не включенном в сумму. Докажите, что сумма всех векторов равна нулевому вектору.

6. На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие — местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное — M. Найдите расстояние между центрами этих часов.

7. Середины противолежащих сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

8. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$ (в нем суммы чисел во всех строках и столбцах равны), центры любых двух клеток соединили вектором по направлению от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех этих векторов равна нулю.

`source:geometry/vectors-g10.tex`

Упорядочивание-2

1. На плоскости отмечено 600 точек общего положения. Докажите, что их можно покрасить в 200 цветов так, чтобы никакие два отрезка, соединяющие точки одного цвета, не пересекались во внутренних точках.

2. Есть $2n$ натуральных чисел, не превосходящих n^2. Докажите, что среди их попарных разностей есть хотя бы 3 одинаковых.

3. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

4. Пусть $f(n)$ — количество несократимых дробей из полуинтервала $[0;1)$ со знаменателем, не превосходящим n. Например, $f(3) = 4$ и $f(4) = 6$. Докажите для любого n неравенство $f(2n) \geqslant 2f(n)$.

source:combinatorics/arrangement-g10/more.tex

Упорядочивание

1. Солдаты построены в две шеренги по n человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги.

2. При каком наибольшем n существуют n палочек таких, что из любых трех можно сложить тупоугольный треугольник?

3. Наименьшее из n различных натуральных чисел равно a. Докажите, что их НОК не меньше na.

4. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призеров конкурса?

5. Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

6. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

7. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы в одной из строк.

8. **(a)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
(b) Имеются 600 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

source:combinatorics/arrangement-g10/r1.tex

Асимптотика

0. *(разобрана)* Из бесконечной доски вырезали какое-то конечное число клеток так, что расстояние между центрами любых двух вырезанных клеток не менее 1 000 000. Обязательно ли оставшееся можно разбить на доминошки? Сторона клетки равна 1.

1. Из бесконечой шахматной доски вырезали конечное число клеток так, что шахматный конь не может обойти оставшуюся доску, побывав в каждой клетке по одному разу. Обязательно ли две какие-то вырезанные клетки находятся на расстоянии, не превосходящем 100?

2. Плоскость покрыта внутренностями конечного числа углов. Докажите, что сумма их градусных мер не менее $360°$.

3. **(a)** Во всех клетках бесконечной доски, кроме тех, обе координаты которых делятся на 100, стоит по фишке. Каждую фишку сдвинули на расстояние, не большее 10 000. Докажите, что хотя бы одна клетка пустая.
(b) Можно ли утверждать то же самое, если изначально фишки стоят во всех клетках, кроме клеток с координатами вида $(100k; 0)$?

4. **(a)** Докажите, что существует число, большее 1 000 000, которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба.
(b) Докажите, что для любого $n > 1$ существует бесконечное число натуральных чисел, не представимых в виде суммы n неотрицательных чисел вида a^n.

5. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 100 500 цифр? Цифры можно вписывать в любые места.

6. Плоскость разбита на равные параллелограммы так, что их вершины — целые точки, а внутри внутри параллелограммов целых точек нет. Докажите, что площадь каждого параллелограмма равна 1.

7. Докажите, что в отрезке $[0; 1]$ все точки, в десятичной записи которых нет цифры 8, можно покрыть отрезками с суммарной длиной меньше 0,001.

source:combinatorics/asymptotic-g10/r1.tex

Принцип крайнего

1. Докажите, что никакой выпуклый многоугольник нельзя разрезать на 100 различных правильных треугольников.

2. На плоскости нарисованы два непересекающихся выпуклых многоугольника. Докажите, что можно провести прямую так, что многоугольники окажутся в разных полуплоскостях.

3. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $(2n-3)$ различных точек.

4. Площадь выпуклого многоугольника M равна 1.
   (a) Докажите, что можно найти треугольник площади 4, содержащий M.
   (b) Докажите, что можно найти треугольник площади $1/4$, содержащийся в M.

5. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чашки весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес.

6. На прямой имеется $2n+1$ отрезок, причем каждый отрезок пересекается как минимум с k другими отрезками. Докажите, что некоторый отрезок пересекается со всеми остальными.

7. Докажите, что ни при каком $n > 1$ число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не является целым.

8. В графе 200 вершин и степень каждой вершины не меньше 100. Докажите, что существует замкнутый путь, проходящий по всем вершинам по одному разу.

9. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, ..., 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

`source:combinatorics/extreme-principle-g10/r1.tex`

Применение графов в сельском хозяйстве

1. Назовем раскраску вершин данного дерева T в три цвета *правильной,* если любые две соединенные ребром вершины имеют разный цвет. Рассмотрим граф, вершины которого есть все правильные раскраски T, и две раскраски соединены ребром, если они различаются ровно в одной вершине. Докажите, что этот граф — связный.

2. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.
(a) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.
(b) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

3. Даны 9 чисел a_1, …, a_9. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ ($i \neq j$) как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1$, …, $2a_9$ — целые.

4. Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовем пару цветов *хорошей,* если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

5. На плоскости расположено 50 попарно непересекающихся кругов. Пару кругов назовем *хорошей,* если можно выбрать по точке с каждого круга так, чтобы отрезок, их соединяющий, не пересекал бы других кругов. Какое наименьшее количество хороших пар?

6. Дан клетчатый квадрат 20×20. M его клеток окрашены в черный цвет, остальные в белый. Если в какой-то момент 3 из 4-х клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в черный цвет, то через минуту и четвертая клетка тоже перекрашивается в черный. При каком наименьшем M может так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет черным?

7. Прямоугольный дачный кооператив разделен M горизонтальными и N вертикальными границами на $(M+1)\times(N+1)$ прямоугольных участков. Сотрудник земельного ведомства хочет выяснить площадь кооператива. Для этого он может только спрашивать у каких-то владельцев участков, чему равна площадь их участка. Какого наименьшего числа вопросов ему хватит?

8. На плоскости нарисованы n кругов, которые попарно не пересекаются (но могут касаться). Точки касания отмечены красным цветом. Докажите, что отмечено не более $(3n-6)$ красных точек.

9. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

10. В прямоугольной таблице расставлены действительные, но нецелые числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Докажите, что можно округлить каждое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась.

11. Дано натуральное число $n > 1$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

12. Можно ли расставить по кругу 1024 нуля или единицы так, чтобы любая последовательность из нулей и единиц длины 10 встречалась среди 10 соседних цифр?

source:combinatorics/graph/hidden-g10/r1.tex

Графы и раскраски

1. **(a)** В графе степень каждой вершины меньше k. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в k цветов.
(b) В связном графе 2015 вершин и стпень каждой не превосходит 17. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в 17 цветов.

2. В графе нет простого пути длины 10. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в 10 цветов. (*Простым* называется путь, все вершины которого различны.)

3. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, диагонали не пересекаются во внутренних точках. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы никакие две одноцветные вершины не были соединены отрезком.

4. На плоскости отметили несколько точек и провели несколько отрезков между ними так, что никакие два отрезка не пересекаются по внутренней точке. Докажите, что можно покрасить точки в 6 цветов так, что никакие две точки одного цвета не будут соединены отрезком.

5. Пусть в графе v вершин и r ребер, а его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geqslant v^2/(v^2 - 2r)$.

6. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $1/n$ часть его ребер так, чтобы вершины оставшегося графа можно было покрасить правильным образов в n цветов.

7. В какое наименьшее число цветов можно покрасить ребра полного графа на 1000 вершинах так, чтобы граф на ребрах каждого цвета был бы несвязным?

8. Можно ли ребра полного графа на n вершинах разбить на тройки, образующие треугольники, если
(a) $n = 9$; **(b)** $n = 10$; **(c)** $n = 27$?

9. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 2011-угольника, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:
(1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин;
(2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков?

10. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?

11. Ребра связного графа раскрашены в N цветов, причем из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. В графе удалили по одному ребру всех цветов, кроме одного. Докажите, что он остался связен.

12. Дан граф T. Оказалось, что для любого k количество способов правильно покрасить вершины графа T в k цветов равно количеству способов покрасить в k цветов дерево на n вершинах. Докажите, что T — дерево на n вершинах.

source:combinatorics/graph/painting-g10/r1.tex

Глава 3

Археоптериксы (11-2)

Олимпиада

1. На координатной плоскости нарисовали графики 100 квадратных трехчленов вида $y = ax^2 + 2a^2x - (2a+1)^2$ при $a = 1, 2, \ldots, 100$. Затем отметили все точки их пересечения. Сколько получилось различных точек?

2. В ящике лежат 1000 яблок, веса любых двух из которых отличаются не более чем вдвое. Петя раскладывает их по пакетам по 10 штук в каждый. Пакет называется *хорошим*, если в нем веса любых двух яблок отличаются не более чем на 10%. Какое наибольшее количество хороших пакетов Петя гарантированно сможет получить?

3. Дан равносторонний треугольник ABC и прямая l, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC отразили относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что проходящая через эти точки прямая касается вписанной окружности треугольника ABC.

4. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что в ней нет квадратов, кубов, …, 2015-х степеней натуральных чисел, и никакая сумма нескольких подряд идущих членов этой последовательности не является квадратом, кубом, …, 2015-й степенью натурального числа?

source:olympiad/g11r2.tex

Алгебраический разнобой

1. Решите уравнение $\max\{x^2+y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}$.

2. Действительные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0; 1]$. Докажите, что

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant x^2y+y^2z+z^2x+1\,.$$

3. Число $(1+\sqrt{2})^{2015}$ записали в виде $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $|a^2-2b^2| = 1$.

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f(x^2+y^2+2xy) = f(x^2)+f(y^2)+2xy\,.$$

5. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению $abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d = 0$. Докажите, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1} > 0\,.$$

6. Про действительные числа a, b и c известно, что сумма дробей

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{и} \quad \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

7. Существует ли многочлен от x и y, множество значений которого есть в точности множество положительных чисел?

8. Положительные иррациональные числа p и q таковы, что $1/p+1/q = 1$. Докажите, что каждое натуральное число является членом ровно одной из последовательностей $[np]$ и $[nq]$.

9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f(x) \leqslant x \text{ и } f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)\,.$$

10. Дано натуральное число $N > 3$. Назовем набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

Уравнения

Во всех задачах нужно решить уравнение в натуральных числах.

1. $x^3 + 5y^3 = 25z^3$.
2. $a^3 + 1 = 3^n$.
3. $m! + 12 = n^2$.
4. $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
5. $x^3 + 13 = 2^y$.
6. $x^4 - 2y^2 = 1$.
7. $|2^m - 3^n| = 1$.
8. $x^3 + 7 = y^2$.
9. $4xy - x - y = z^2$.
10. $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

source:algebra/number-theory/diophantine-equations-g11/r2.tex

Числовой разнобой

1. При каких целых k число $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c, сумма которых не равна 0?

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{60} + b^{60} + c^{60}$ делится на 2015. Докажите, что число abc также делится на 2015.

3. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $(y^2 - 1) = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

4. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

и приведем каждую из них к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную четность?

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентной формулой и начальными значениями:

$$a_1 = 257, \quad a_2 = 2015, \qquad a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2.$$

Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 2011.

6. Пусть $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ — все натуральные делители числа n. Докажите, что

$$d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2.$$

7. Найдите наименьшее простое p такое, что $(2^{120!} - 1)$ делится на p, но не делится на p^2.

8. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} — наибольший простой делитель числа $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что ни один из членов последовательности не равен 5.

9. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Какое наименьшее значение может принимать величина $\min(m, n)$?

source:algebra/number-theory/mixture-g11/r2.tex

Разнобой по ТЧ

1. Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

2. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение НОД$(9m + 7n, 3m + 2n)$.

3. Найти такие 2015 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

4. Докажите, что:

(a) $\underbrace{11\ldots11}_{12}$ делится на 13; **(b)** $\underbrace{11\ldots11}_{288}$ делится на 323;

(c) $\underbrace{11\ldots11}_{420}$ делится на 539.

5. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом.

6. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

7. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — седьмая степень, треть — пятая степень, а четверть — тринадцатая степень.

8. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

9. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Оказалось, что $P(8)$, $P(12)$ и $P(14)$ делятся на 1001. Докажите, что тогда сумма коэффициентов $P(x)$ также делится на 1001.

10. Может ли наименьшее общее кратное целых чисел $1, 2, \ldots, n$ быть в 2016 раз больше, чем наименьшее общее кратное целых чисел $1, 2, \ldots, m$?

11. Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остается составным.

source:algebra/number-theory/mixture-g11r2.tex

Многочлены

1. $P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые многочлены десятой степени, графики которых не пересекаются. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. Многочлен с целыми коэффициентами в четырех целых точках принимает значение -2. Может ли он в какой-нибудь целой точке принимать значение 2015?

3. Многочлен $Q(x)$ таков, что уравнение $Q(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $Q(Q(x)) = x$ также не имеет действительных корней.

4. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

5. Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ и бесконечная последовательность различных целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таковы, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$ и т. д. Какую степень и старший коэффициент может иметь $P(x)$?

6. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что уравнения $P(x) = 1$, $P(x) = 2$, $P(x) = 3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x) = 5$ не может иметь двух или более целых корней.

7. Докажите, что функция $f(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ является многочленом $(k+1)$-ой степени от переменной n с рациональными коэффициентами.

8. Существует ли многочлен от x и y, принимающий положительные значения в тех и только в тех точках, обе координаты которых положительны?

source:algebra/polynomial/mixture-g11/r2.tex

Теорема Фейербаха

1. **(a)** Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно сторон и середин сторон треугольника ABC лежат на описанной окружности треугольника ABC.
   (b) **Окружность Эйлера.** Докажите, что середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, лежат на одной окружности, причем центр этой окружности является серединой отрезка HO, где H — ортоцентр, O — центр описанной окружности.

Определение. Углом между пересекающимися окружностями называется меньший угол между касательными в их точке пересечения.

2. Даны две перпендикулярные окружности. Докажите, что касательная в точке их пересечения к первой окружности проходит через центр второй.

3. Пусть окружности α и β пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром на прямой MN перпендикулярна α. Докажите, что ω перпендикулярна окружности β.

Лемма Архимеда. Есть окружность ω и ее хорда AB. Окружность α касается ω в точке C, а хорды AB — в точке D. Тогда прямая CD проходит через точку M — середину дуги AB, не содержащую точку C.

4. **(a)** Докажите, что в условиях леммы Архимеда окружность γ с центром в точке M и радиусом MA перпендикулярна окружности α.
   (b) **Критерий Архимеда.** Пусть окружность α касатеся хорды AB окружности ω в точке D, а также окружность α перпендикулярна окружности γ. Докажите, что α касается ω.

5. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Пусть точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров из точек A и C на диагональ BD, точки B_1 и D_1 — основания перпендикуляров из точек B и D на диагональ AC. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписанный.

6. **(a)** В треугольнике ABC точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров из вершин A и C на биссектрису угла B. Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC, а также точки A_1 и C_1 лежат на одной окружности.
   (b) Докажите, что центром этой окружности является середина стороны AC.

7. **(a)** В треугольнике ABC точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров из вершин A и C на биссектрису угла B; BB_1 — высота, B' — середина стороны AC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, B' лежат на одной окружности.
   (b) Рассмотрим точку P — середину дуги B_1B' окружности Эйлера треугольника ABC. Докажите, что точка P равноудалена от точек A_1 и C_1. Выведите отсюда, что P — центр описанной окружности четырехугольника $A_1B_1C_1B'$.

8. **Теорема Фейербаха.** Используя критерий Архимеда, докажите, что вписанная окружность и окружность Эйлера треугольника ABC касаются.

Один лучше двух

Теорема Штейнера–Понселе. Любое построение, выполнимое на плоскости циркулем и линейкой, можно выполнить одной линейкой, если нарисована окружность и отмечен ее центр.

1. Есть линейка без делений.
(a) Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Разделите его пополам.
(b) Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок.
(c) Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Разделите его на n равных частей.
(d) Разделите сторону квадратного стола пополам. Линии можно проводить только на поверхности стола.
(e) Разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.
(f) Дана окружность, ее диаметр AB и точка P не на окружности. Проведите через точку P прямую, перпендикулярную AB.
(g) Дана окружность, ее диаметр AB и точка P на окружности. Проведите через точку P прямую, перпендикулярную AB.

2. На плоскости даны окружность и ее центр. Пользуясь только линейкой
(a) из любой точки проведите прямую, параллельную данной прямой, и опустите на данную прямую перпендикуляр;
(b) на данной прямой от данной точки отложите отрезок, равный данному отрезку;
(c) постройте отрезок длиной ab/c, где a, b, c — длины данных отрезков;
(d) постройте точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A, а радиус равен длине данного отрезка;
(e) постройте точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки. Осознайте, что из всего вышедоказанного следует теорема Штейнера–Понселе.

source:geometry/handicapped-construction/r2.tex

Гомотетия

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.

1. Докажите, что при гомотетии прямая переходит в параллельную ей прямую, а окружность — в окружность.

2. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.

3. На прямоугольном столе лежит n кругов радиуса R так, что никакие два не имеют общих внутреннх точек. Верно ли, что на этом столе можно разместить $4n$ кругов радиуса $R/2$ так, чтобы никакие два не имели общих внутренних точек?

4. В окружности ω проведена хорда AB. Найдите геометрической место точек пересечения медиан треугольников ABC, где $C \in \omega$.

5. **(a)** Докажите, что треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.
(b) Докажите, что точка пересечения высот H, точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.
(c) В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.
(d) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

6. Дан угол и точка A внутри него. Постройте окружность, вписанную в угол и проходящую через точку A. Сколько решений имеет задача?

7. **Лемма Архимеда.** В окружности ω проведена хорда AB. Рассмотрим окружность, касающиеся хорды AB и данной дуги AB. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания, проходит через середину оставшейся дуги AB.

8. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

9. Докажите, что радиус окружности, целиком расположенной внутри треугольника, не больше радиуса вписанной окружности.

Добавка

1. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка A_1. Оказалось, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABA_1 и ACA_1 равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BA_1 и CA_1, равны.

2. На плоскости даны две непересекающихся окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $2R$ и R соответственно. Найдите ГМТ точек пересечения медиан треугольников, у которых одна вершина лежит на ω_1, а две другие — на ω_2.

3. Внутри круга расположен треугольник ABC. Окружность ω_a касатеся продолжений сторон AB и AC за точку A, а также границы круга внутренним образом в точке A'. Аналогично определим точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

4. Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B. Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A, через точку B — касательные к окружности, ближайшей к B. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

source:geometry/homothety-g11r2/more.tex

Теорема о трех колпаках

1. Рассмотрим две гомотетии: первую с центром O_1 и коэффициентом k_1, а вторую с центром O_2 и коэффициентом k_2.
(a) Докажите, что если $k_1 \cdot k_2 = 1$, то композиция гомотетий является параллельным переносом.
(b) Докажите, что если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, то композиция гомотетий является гомотетией, центр которой расположен на прямой O_1O_2.

2. Сколько существует гомотетий, которые данный отрезок переводят в данный? А данную окружность — в данную?

3. **(a)** **Теорема о трех колпаках.** На плоскости даны три неравных окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Докажите, что 3 точки пересечения их общих внешних касательных лежат на одной прямой.
(b) Сколько троек точек, лежащих на одной прямой, можно найти, если рассмотреть еще точки пересечения внутренних касательных?

4. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD. Докажите, что точки пересечения прямых AB и CD, AP и DQ, CQ и PB лежат на одной прямой.

5. Дан треугольник ABC. Рассмотрим окружность, касающуюся внутренним образом описанной окружности треугольника ABC в точке P_A, а также сторон AB и AC. Аналогично определим точки P_B и P_C. Докажите, что прямые AP_A, BP_B и CP_C пересекаются в одной точке.

6. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 вписаны в углы треугольника ABC. Окружность Ω касается их внешним образом в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно.
(a) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
(b) Пусть радиусы ω_1, ω_2 и ω_3 равны. Докажите, что центр Ω лежит на прямой, соединяющей центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Пусть P — произвольная точка на прямой BC, M — середина AB, X — точка пересечения AB и PD, Q — точка пересечения AC и PM, Y — точка пересечения AB и DQ. Докажите, что M — середина XY.

8. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к паре окружностей ω_1 и ω_2 и к паре Ω_1 и Ω_2, отличные от прямой AB, пересекаются на прямой AB.

source:geometry/homothety-g11r2/monge-theorem.tex

Лемма Холла

1. В условиях леммы Холла назовем множество из k юношей критическим, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k. Докажите, что объединение и пересечение двух критических множеств — критическое множество.

2. 20 школьников решали 20 задач. Каждый решил ровно две задачи, и каждую задачу решили ровно два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач так, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач и все задачи будут рассказаны.

3. В каждой строчке и в каждом столбце таблицы 8×8 стоит ровно 3 фишки. Докажите, что из них можно выбрать восемь — по одной в каждой строке и столбце.

4. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

5. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

6. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

7. Прямоугольник $m \times n$ ($m \leqslant n$) называется *латинским прямоугольником,* если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.

8. Пусть $F = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ — набор конечных подмножеств множества E. Множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ различных элементов из E такое, что s_i принадлежит E_i при любом i, назовем *системой представителей.* Докажите, что система представителей существует тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из набора F содержит не менее k элементов множества E (при любом натуральном k от 1 до n).

9. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

10. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Докажите, что тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

source:combinatorics/graph/hall-theorem-g11/1.tex

Лемма Холла. Продолжаем разговор!

11. В игре «Киллер» в живых осталось n юношей и n девушек. Каждая девушка охотится за k юношами и, возможно, за несколькими девушками. Кроме того, за каждым юношей охотится k девушек. Докажите, что каждая девушка сможет совершить убийство, причем девушкам нет нужды убивать девушек.

12. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от числа всех женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.

13. *(лемма Холла с дефицитом)* Докажите, что если любые k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ юношей знакомы в совокупности не менее чем с $(k-d)$ девушками, то $(n-d)$ юношей могут выбрать себе невесту из числа знакомых.

14. *(лемма Холла для арабских стран)* Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они смогут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

15. Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. k-й юноша хочет жениться на a_k знакомых девушках. Докажите, что они смогут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора $\{k_1, \dots, k_m\}$ юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше $a_{k_1} + \dots + a_{k_m}$.

16. В квадрате $n \times n$ стоят неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна 1. Докажите, что в этот квадрат можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы под каждой поставленной ладьей было положительное число.

17. В школу «Хогвартс» поступило 24 первокурсника. Известно, что в Гриффиндоре учатся храбрые, в Когтевране — умные, в Пуффендуе — старательные, а в Слизерине — хитрые. Каждый первокурсник обладает ровно двумя этими качествами, и все качества встречаются одинаковое число раз. Докажите, что Распределительная Шляпа сможет поровну поделить первокурсников на факультеты.

18. Пусть выполнено условие леммы Холла, и каждый из n юношей знаком по меньшей мере с k девушками. Докажите, что супружеские пары могут быть составлены по крайней мере $k!$ способами, если $k \leqslant n$.

source:combinatorics/graph/hall-theorem-g11/2.tex

Графский разнобой

1. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся хотя бы два друга. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

2. В коллективе из 30 человек любых пятерых можно усадить за круглый стол таким образом, что каждый будет сидеть со своим знакомым. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, где каждый знаком с каждым.

3. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

4. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга; ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей; …; ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.

5. 22 школьника участвовали в съезде юных писателей. После съезда каждый из них прочитал произведения трех юных писателей, побывавших на съезде. Докажите, что из делегатов съезда можно составить комиссию из четырех человек так, что в комиссии никто не читал произведения остальных ее членов.

6. В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

7. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

8. На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 83 доклада, сделанных его коллегами. Докажите, что найдутся четверо, каждому из которых понравились доклады трех других.

9. Некоторые города Графинии соединены дорогами. Из каждого города выходит не более n дорог, но среди каждых m городов есть два, соединенные дорогой, не проходящей через другие города. Какое наибольшее количество городов может быть в Графинии?

10. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

source:combinatorics/graph/mixture-g11.tex

Комбинаторный разнобой

1. Сколькими спообами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу из 24 человек?

2. Переплетчик должен переплести 15 различных книг в красный, зеленый, жёлтый и синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

3. 96 шариков пронумерованы 1, 1, 1, 2, 2, 2, … , 32, 32, 32 и разбросаны в 14 коробок таким образом, что в каждой коробке шарики с разными номерами. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные числа.

4. 15 волейбольных команд разыграли турнир по круговой системе, причем каждая команда одержала по 7 побед. Сколько окажется в турнире таких троек, команды которых во встречах между собой одержали по одной победе?

5. В Цветочном городе живет 2010 коротышек. У них имеется 1234 монеты по 10 копеек и неограниченный запас монет по 5 копеек. Иногда коротышки меняются монетами: один дает другому монету в 10 копеек и получает взамен две монеты по 5 копеек. Както вечером каждый коротышка заявил: «Сегодня я отдал ровно 10 монет». Докажите, что кто-то из них ошибся.

6. Кузнечик сидит в одной из вершин равностороннего треугольника. За один прыжок он может оказаться в любой из соседних вершин. Сколькими различными способами он может за 10 прыжков вернуться в начальную вершину?

7. Сколькими способами m птиц попарно различных видов можно рассадить по n клеткам попарно различных цветов, если в каждой клетке должны сидеть одна или две птицы?

8. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Сколько возможных различных маршрутов у улитки?

9. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее, чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки.

10. Посчитайте количество последовательностей длины $2n$, в которых по n раз встречаются числа 1 и -1, и все частичные суммы неотрицательны.

source:combinatorics/mixture-g11.tex

Разнобой (комбинаторика)

1. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

2. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 2015×2015. Начинающий ставит крестики, его соперник — нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов — это очки, набранные первым игроком. Число строчек и столбцов, где ноликов больше — очки второго. Тот из игроков, который наберет больше очков — побеждает. Кто побеждает при правильной игре?

3. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

4. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В колоде лежит 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадает с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

7. В клетках таблицы $n \times n$ записаны некоторые числа. Разрешается вместо любых двух из них записать в обе клетки их среднее арифметическое. Найдите все натуральные n, при которых для любой начальной расстановки чисел в таблице такими операциями можно добиться того, чтобы во всех клетках были записаны одинаковые числа.

`source:combinatorics/mixture-g11r2.tex`

Взвешивания-1

1. Среди 29 разложенных в ряд монет имеется 3 фальшивые, причем известно, что они лежат подряд. Настоящие монеты имеют стандартный вес, а фальшивые — какой попало, но легче настоящей. За три взвешивания на рычажных весах выявите все три фальшивые монеты.

2. Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, — фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей. Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь. (Все фальшивые монеты весят одинаково.)

3. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

4. Антиквар приобрел 99 одинаковых по виду старинных монет. Ему сообщили, что ровно одна из монет — фальшивая — легче настоящих (а настоящие весят одинаково). Как, используя чашечные весы без гирь, за 7 взвешиваний выявить фальшивую монету, если антиквар не разрешает никакую монету взвешивать более двух раз?

5. Имеется 6 монет, из которых две — фальшивые, тяжелее настоящих на 0,1 грамма. Есть весы, которые реагируют только на разность весов на чашках, не меньшую 0,2 грамма. Как найти обе фальшивые монеты за четыре взвешивания?

6. Даны 8 гирек весом 1, 2, … , 8 граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

7. Имеется 40 монет, три из которых фальшивые, которые легче настоящих, но имеют одинаковые массы. За три взвешивания определите 18 настоящих монет.

8. Имеется 100 монет, четыре из которых фальшивые, которые легче настоящих, но имеют одинаковые массы. За два взвешивания определите 14 настоящих монет.

9. При изготовлении партии из $N \geqslant 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

10. Адвокат знает, что все 10 монет весят одинаково. Как ему убедить в этом судью, сделав не более трех взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Взвешивания-2

1. Имеется 101 монета. Среди них 100 настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета. Как это сделать при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

2. Имеется 7 монет, из которых две — фальшивые, весящие меньше настоящих. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

3. Имеется 6 монет, среди которых не более двух фальшивых, которые весят одинаково и легче настоящих. Как за 3 взвешивания определить все фальшивые монеты?

4. Имеется 5 золотых монет, из которых одна фальшивая легкая, и 5 серебряных монет, из которых одна фальшивая легкая. За три взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты. (Настоящая золотая и настоящая серебряная весят одинаково.)

5. Среди 21 внешне одинаковой монеты есть одна фальшивая, она легче остальных. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

6. Имеется три кучки по 2 монеты, в каждой из которых по одной настоящей и одной фальшивой. Известно, что все настоящие весят одинаково и что все фальшивые весят одинаково, причем фальшивые весят легче. За 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найдите все фальшивые монеты.

7. Из девяти монеток только одна настоящая, а остальные восемь — фальшивые. Четыре из фальшивых монет весят одинаково и легче настоящей, другие четыре тоже весят одинаково, но тяжелее настоящей. Найдите настоящую монету за шесть взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

8. Имеется 13 монет, из которых две — фальшивые, весящие меньше настоящих. За четыре взвешивания определите обе фальшивые монеты.

source:combinatorics/weighing-g11/2.tex

Глава 4

Птеродактили (11-1)

Олимпиада

1. На координатной плоскости нарисовали графики 100 квадратных трехчленов вида $y = ax^2 + 2a^2x - (2a+1)^2$ при $a = 1, 2, \ldots, 100$. Затем отметили все точки их пересечения. Сколько получилось различных точек?

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + c, b + c)$?

3. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

4. Есть 101 заключенный. Их собираются казнить необычным способом. Для этого в отдельной комнате ставятся в ряд 100 шкатулок и в них раскладываются произвольным образом таблички с номерами от 1 до 100. Затем одного из заключенных запускают в комнату. Он смотрит содержимое всех шкатулок и имеет право поменять местами две таблички. Оставшимся 100 заключенным присваиваются номера от 1 до 100. После этого их последовательно вводят в комнату. Каждый имеет право посмотреть содержимое ровно 50 шкатулок. Если в этих 50 шкатулках каждый найдет табличку, совпадающую со своим номером, то заключенные спасены. Если хотя бы один ошибется, то всех казнят. Могут ли заключенные заранее договориться так, чтобы спастись? (Тот, кто уже открывал шкатулки, никак не общается с остальными; двигать шкатулки нельзя.)

source:olympiad/g11r1.tex

Алгебраический разнобой

1. Решите уравнение $\max\{x^2+y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}$.

2. Действительные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0; 1]$. Докажите, что

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant x^2y+y^2z+z^2x+1\,.$$

3. Число $(1+\sqrt{2})^{2015}$ записали в виде $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $|a^2-2b^2| = 1$.

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f(x^2+y^2+2xy) = f(x^2)+f(y^2)+2xy\,.$$

5. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению $abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d = 0$. Докажите, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1} > 0\,.$$

6. Про действительные числа a, b и c известно, что сумма дробей

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,,\quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad\text{и}\quad \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

7. Существует ли многочлен от x и y, множество значений которого есть в точности множество положительных чисел?

8. Положительные иррациональные числа p и q таковы, что $1/p+1/q = 1$. Докажите, что каждое натуральное число является членом ровно одной из последовательностей $[np]$ и $[nq]$.

9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f(x) \leqslant x \text{ и } f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)\,.$$

10. Дано натуральное число $N > 3$. Назовем набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

source:algebra/mixture-g11.tex

Уравнения

Во всех задачах нужно решить уравнение в натуральных числах.

1. $a^3 + 1 = 3^n$.
2. $m! + 12 = n^2$.
3. $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
4. $x^3 + 13 = 2^y$.
5. $x^4 - 2y^2 = 1$.
6. $|2^m - 3^n| = 1$.
7. $x^3 + 7 = y^2$.
8. $4xy - x - y = z^2$.
9. $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.
10. $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.
11. $x^2 + 5 = y^3$.

source:algebra/number-theory/diophantine-equations-g11/r1.tex

Числовой разнобой

1. При каких целых k число $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c, сумма которых не равна 0?

2. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $(y^2 - 1) = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

3. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$$

и приведем каждую из них к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную четность?

4. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентной формулой и начальными значениями:

$$a_1 = 257, \quad a_2 = 2015, \qquad a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2.$$

Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 2011.

5. Пусть $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ — все натуральные делители числа n. Докажите, что

$$d_1d_2 + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k < n^2.$$

6. Найдите наименьшее простое p такое, что $(2^{120!} - 1)$ делится на p, но не делится на p^2.

7. Последовательность $x_1, x_2, \dots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} — наибольший простой делитель числа $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что ни один из членов последовательности не равен 5.

8. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Какое наименьшее значение может принимать величина $\min(m, n)$?

9. Три натуральных числа таковы, что сумма их попарных произведений составляет половину точного квадрата, а сумма их квадратов является степенью простого числа. Какие значения может принимать это простое число?

10. Пусть p — простое число. Про целые числа $x_1, x_2, \dots, x_p$ известно, что $x_1^n + x_2^n + \dots + x_p^n$ делится на p при любом натуральном n. Докажите, что $(x_1 - x_2)$ делится на p.

source:algebra/number-theory/mixture-g11/r1.tex

Многочлены

1. $P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые многочлены десятой степени, графики которых не пересекаются. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. Многочлен с целыми коэффициентами в четырех целых точках принимает значение -2. Может ли он в какой-нибудь целой точке принимать значение 2015?

3. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

4. Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ и бесконечная последовательность различных целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таковы, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$ и т. д. Какую степень и старший коэффициент может иметь $P(x)$?

5. Докажите, что функция $f(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ является многочленом $(k+1)$-ой степени от переменной n с рациональными коэффициентами.

6. Существует ли многочлен от x и y, принимающий положительные значения в тех и только в тех точках, обе координаты которых положительны?

7. Шесть членов команды Судьбы на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$). Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандадата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком наименьшем n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшегося?

`source:algebra/polynomial/mixture-g11/r1.tex`

Один лучше двух

Пусть не входит сюда тот, кто не знает геометрии. *Платон*

Теорема Штейнера–Понселе. Любое построение, выполнимое на плоскости циркулем и линейкой, можно выполнить одной линейкой, если нарисована окружность и отмечен ее центр.

Теорема Мора–Маскерони. Любое построение, выполнимое на плоскости циркулем и линейкой, можно выполнить одним циркулем.

1. На плоскости даны окружность и ее центр. Пользуясь только линейкой
(a) из данной точки, не лежащей на окружости, опустить перпендикуляр на данный диаметр;
(b) из данной точки, лежащей на окружости, опустить перпендикуляр на данный диаметр;
(c) через произвольную точку проведите прямую, параллельную данной прямой, и опустите на данную прямую перпендикуляр;
(d) на данной прямой от данной точки отложите отрезок, равный данному отрезку;
(e) постройте отрезок длиной ab/c, где a, b, c — длины данных отрезков;
(f) постройте точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A, а радиус равен длине данного отрезка;
(g) постройте точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки. Осознайте, что из всего вышедоказанного следует теорема Штейнера–Понселе.

2. Пользуясь только циркулем постройте
(a) отрезок в n раз длиннее данного;
(b) образ точки A, лежащей вне окружности, при инверсии относительно данной окружности с данным центром;
(c) образ точки A, лежащей внутри окружности, при инверсии относительно данной окружности с данным центром;
(d) середину отрезка с данными концами;
(e) центр данной окружности. Осознайте, как построить окружность, проходящую через три данные точки;
(f) точки пересечения данной окружности с прямой, проходящей через две данные точки;
(g) точку пересечения прямых AB и CD, где A, B, C и D — данные точки. Осознайте, что из всего вышедоказанного следует теорема Мора–Маскерони;
(h) Пусть циркулем можно чертить окружности радиуса не больше 1. Верно ли, что любое построение, выполнимое на плоскости циркулем и линейкой, можно выполнить этим циркулем?

3. Есть *двусторонняя линейка* ширины a. С помощью нее можно
(1) через две данные точки проводить прямую;
(2) проводить прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние a;

(3) через данные две точки A и B, где $AB \geqslant a$, проводить параллельные прямые, расстояние между которыми равно a (таких пар прямых две).

Докажите, что с помощью двусторонней линейки можно выполнить любое построение, выполнимое с помощью циркуля и линейки.

source:geometry/handicapped-construction/r1.tex

Подделываем подписи

Рассмотрим граф G на плоскости. Будем считать некоторые его вершины *неподвижными* — жестко закрепленными на плоскости. Остальные назовем *подвижными*. Припишем каждому ребру этого графа его длину — фиксированное положительное число. Наш граф нарисован на плоскости так, что неподвижные вершины закреплены, ребра являются отрезками, а расстояния на плоскости между вершинами, соединенными ребром, равны длине ребра. Будем называть вершины G *шарнирами*, а ребра — *стержнями*. Полученную конструкцию назовем *шарнирным механизмом*. *Конфигурационным пространством* (для какого-то закрепления неподвижных вершин) назовем множество всевозможных состояний шарнирного механизма. *Конфигурационным пространством шарнира* v назовем множество точек, в которых может располагаться вершина v. *Кратностью состояния* s вершины v назовем количество состояний, в которых вершина v находится в состоянии s.

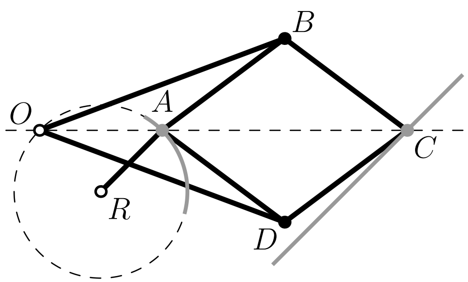
1. **(a)** Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из подвижных шарниров A, B, C, неподвижного шарнира O и ребер OA, AB, BC, CO, длина которых равна a. Найдите конфигурационное пространство и кратность состояний вершины B.

(b) **Ромб.** Что можно добавить в механизм так, чтобы конфигурационное пространство шарнира B не поменялось, а замкнутая ломаная $OABC$ всегда была ромбом (возможно, вырожденным)? Найдите кратность состояний вершины B.

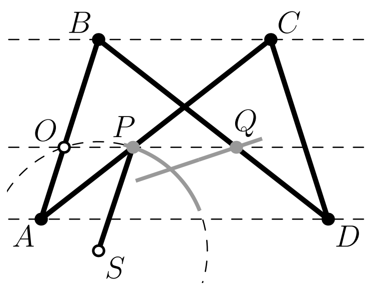
2. **(a)** Рассмотрим шарнирный механизм, состоящий из подвижных шарниров A, B, C, неподвижного шарнира O и ребер OA, AB, BC, CO, $|OA| = |BC| = a$, $|OC| = |AB| = b$. Найдите конфигурационное пространство и кратность состояний вершины B.

(b) **Параллелограмм.** Что можно добавить в механизм так, чтобы конфигурационное пространство шарнира B не поменялось, а замкнутая ломаная $OABC$ всегда была параллелограммом (возможно, вырожденный)? Найдите кратность состояний вершины B.

(c) **Антипараллелограмм.** Что можно добавить в механизм так, чтобы конфигурационное пространство шарнира B не поменялось, а замкнутая ломаная $OABC$ всегда была самопересекающейся? Найдите кратность состояний вершины B.



(a) к задаче 3.



(b) к задаче 4.

Рис. 4.1: инверсоры.

3. **Инверсор Понселе.** Рассмотрим шарнирный механизм, изображенный на рисунке 4.1a. $ABCD$ — ромб из задачи 1b, точка O лежит на луче CA за точкой A, шарниры O и R закреплены, стержни изображены сплошными линиями. Найдите конфигурационное пространство точки C.

4. **Инверсор Гарта.** Рассмотрим шарнирный механизм, изображенный на рисунке 4.1b. $ABCD$ — антипараллелограмм из задачи 2c, точка O лежит на прямой PQ, которая параллельна AD, точка S такова, что $OS = SP$, шарниры O и S закреплены, стержни изображены сплошными линиями. Докажите, что при движении P по окружности точка Q движется по прямой.

Будем говорить, что шарнирный механизм *рисует множество* A, если конфигурационное пространство некоторой вершины этого механизма совпадает с множеством A.

5. Постройте шарнирный механизм, который рисует со внутренностью
   (a) прямоугольник; **(b)** треугольник.

6. **Реверсор Кемпе.** Даны вещественные $a, b > 0$ и целое $k \neq 0$. Посмотрев на рисунок 4.2, постройте два шарнирных механизма, удовлетворяющих следующему условию: в них есть стержни OA, OB, OC, причем $|OA| = a$, $|OB| = b$, и если угол от вектора OC к вектору OA равен α, то угол от вектора OC к вектору OB равен $k\alpha$ или α/k:
   (a) для $k = 2$; **(b)** для $k = -1$;
   (c) для произвольного натурального k.

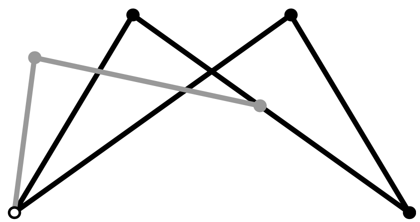


Рис. 4.2: к задаче 6.

7. **Сумматор Кемпе.** Даны вещественные $a, b, c > 0$. Используя реверсор Кемпе, постройте шарнирный механизм, удовлетворяющий следующему условию: в нем есть стержни OA, OB, OC, OD, причем $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$ и если угол от вектора OD к вектору OA равен α, угол от вектора OD к вектору OB равен β, то угол от вектора OD к вектору OC равен $\alpha + \beta$.

8. **Транслятор Кемпе.** Даны вещественные $a, b > 0$. Постройте шарнирный механизм, который содержит стержень OX и шарниры Y и Z, причем $|OX| = a$ и в каждой конфигурации при $|OY| \leqslant b$ выполняется $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$.

Теорема Кемпе. Пусть $f(x, y)$ — многочлен от двух переменных, D — замкнутый круг на плоскости. Тогда существует шарнирный механизм, который рисует множество

$$D \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0\right\}.$$

9. Пусть радиус D равен $2R$. Рассмотрим ромб $OABC$, где O совпадает с началом координат, а длины стержней равны R. Параметризуем точки круга D положением точки B. Пусть

координаты точек A и C равны $\big(R\cos(\alpha), R\sin(\alpha)\big)$ и $\big(R\cos(\beta), R\sin(\beta)\big)$ соответственно, тогда координаты точки

$$B = (x, y) = \big(R\cos(\alpha) + R\cos(\beta), R\sin(\alpha) + R\sin(\beta)\big) .$$

(a) Докажите, что многочлен $f(x, y)$ может быть представлен в виде

$$f = \sum_{|r|+|s|\leqslant n} f_{rs} \cdot \cos(r\alpha + s\beta + \gamma_{rs}) ,$$

где n, f_{rs}, γ_{rs} — константы, зависящие от многочлена f, а r и s — целые числа.
(b) Докажите, что можно дополнить ромб так, чтобы в полученном шарнирном механизме существует вершина X такая, что для каждого положения (x_0, y_0) вершины B абсцисса вершины X одинакова и равна $f(x_0, y_0)$.
(c) Соединив конструкцию из предыдущего пункта и инверсор Ponселе, докажите теорему Кемпе.

Забавный факт. Поскольку любую непрерывную кривую на плоскости можно хорошо приблизить многочленом от двух переменных, то теорему Кемпе можно интерпретировать следующим образом: можно построить шарнирный механизм, который подделывает вашу подпись. Желающие могут проверить:
http://www.david.wf/linkage/.

source:geometry/linkage.tex

Разнобой

1. В треугольнике ABC проведена чевиана AA_1. Оказалось, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABA_1 и ACA_1 равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BA_1 и CA_1, равны.

2. Дан равносторонний треугольник ABC и прямая, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что прямая, проходящая через эти точки, касается вписанной окружности треугольника ABC.

3. Для остроугольного треугольника ABC и произвольной точки X внутри него обозначим через A_X, B_X, C_X точки пересечения прямых AX, BX, CX со сторонами BC, AC, AB соответственно. Сколько точек внутри треугольника ABC могут обладать тем свойством, что $\angle AA_XC = \angle BB_XA = \angle CC_XB$?

4. **(a)** *Окружность Конвея.* В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим от точки A вовне треугольника отрезки, равные BC. Концы этих отрезков обозначим A_1 и A_2. Аналогично определим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что эти шесть точек лежат на одной окружности.

(b) *Окружность Тэйлора.* В остроугольном треугольнике ABC опустим перпендикуляры на стороны треугольника из оснований высот. Докажите, что шесть получившихся точек лежат на одной окружности, причем она является окружностью Конвея для треугольника с вершинами в серединах сторон ортотреугольника.

5. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что $MA + MB + MC \leqslant \max(AB + BC, BC + CA, CA + AB)$.

6. В треугольнике ABC на биссектрисе AA_1 выбрана точка O так, что $\angle OBC = \angle A + \angle C$. Пусть B_1 и C_1 — точки пересечения прямых BO и CO со сторонами AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

7. В некоторой трапеции сумма боковой стороны и диагонали равна сумме другой боковой стороны и другой диагонали. Докажите, что трапеция равнобокая.

source:geometry/mixture-g11r1.tex

Точка Лемуана

Напоминание 1. Пусть точка S на стороне BC треугольника ABC такова, что прямая AS симметрична медиане AM относительно биссектрисы угла A. Тогда AS называется *симедианой*.

Напоминание 2. Симедианы треугольника пересекаются в одной точке L, которая называется *точкой Лемуана*.

Напоминание 3. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Тогда AP содержит симедиану треугольника ABC.

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB соответственно. Отрезок B_1C_1 называется *антипараллельным* отрезку BC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

1. **(a)** Докажите, что AS делит антипараллельный отрезок пополам тогда и только тогда, когда AS — симедиана.
   (b) Докажите, что если симедиана AS делит пополам отрезок B_1C_1, где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и BC, то B_1C_1 антипараллелен BC.

2. Докажите, что точка Лемуана в прямоугольном треугольнике с прямым углом C является серединой высоты, опущенной из вершины C.

3. **(a)** Через точку X внутри треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X — точка Лемуана.
   (b) В треугольнике ABC провели три равных отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что их концы лежат на одной окружности.
   (c) Через точку L провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что их точки пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности.
   (d) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта является серединой отрезка OL, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть a_1, b_1, c_1 — расстояния от точки L до сторон треугольника ABC. Докажите, что $a_1 : a = b_1 : b = c_1 : c$.

5. **(a)** Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC, H_a, H_b, H_c — середины высот, проведенных к сторонам BC, AC, AB. Докажите, что прямые A_1H_a, B_1H_b, C_1H_c пересекаются в одной точке.
   (b) Докажите, что эта точка — точка Лемуана.

`source:geometry/symmedian-point.tex`

Лемма Холла

1. В условиях леммы Холла назовем множество из k юношей критическим, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k. Докажите, что объединение и пересечение двух критических множеств — критическое множество.

2. 20 школьников решали 20 задач. Каждый решил ровно две задачи, и каждую задачу решили ровно два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач так, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач и все задачи будут рассказаны.

3. В каждой строчке и в каждом столбце таблицы 8×8 стоит ровно 3 фишки. Докажите, что из них можно выбрать восемь — по одной в каждой строке и столбце.

4. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

5. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

6. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

7. Прямоугольник $m \times n$ $(m \leqslant n)$ называется *латинским прямоугольником,* если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.

8. Пусть $F = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ — набор конечных подмножеств множества E. Множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ различных элементов из E такое, что s_i принадлежит E_i при любом i, назовем *системой представителей.* Докажите, что система представителей существует тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из набора F содержит не менее k элементов множества E (при любом натуральном k от 1 до n).

9. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

10. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Докажите, что тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

source:combinatorics/graph/hall-theorem-g11/1.tex

Лемма Холла. Продолжаем разговор!

11. В игре «Киллер» в живых осталось n юношей и n девушек. Каждая девушка охотится за k юношами и, возможно, за несколькими девушками. Кроме того, за каждым юношей охотится k девушек. Докажите, что каждая девушка сможет совершить убийство, причем девушкам нет нужды убивать девушек.

12. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от числа всех женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.

13. *(лемма Холла с дефицитом)* Докажите, что если любые k ($1 \leqslant k \leqslant n$) юношей знакомы в совокупности не менее чем с $(k-d)$ девушками, то $(n-d)$ юношей могут выбрать себе невесту из числа знакомых.

14. *(лемма Холла для арабских стран)* Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они смогут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

15. Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. k-й юноша хочет жениться на a_k знакомых девушках. Докажите, что они смогут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора $\{k_1, \ldots, k_m\}$ юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше $a_{k_1} + \ldots + a_{k_m}$.

16. В квадрате $n \times n$ стоят неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна 1. Докажите, что в этот квадрат можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы под каждой поставленной ладьей было положительное число.

17. В школу «Хогвартс» поступило 24 первокурсника. Известно, что в Гриффиндоре учатся храбрые, в Когтевране — умные, в Пуффендуе — старательные, а в Слизерине — хитрые. Каждый первокурсник обладает ровно двумя этими качествами, и все качества встречаются одинаковое число раз. Докажите, что Распределительная Шляпа сможет поровну поделить первокурсников на факультеты.

18. Пусть выполнено условие леммы Холла, и каждый из n юношей знаком по меньшей мере с k девушками. Докажите, что супружеские пары могут быть составлены по крайней мере $k!$ способами, если $k \leqslant n$.

source:combinatorics/graph/hall-theorem-g11/2.tex

Графский разнобой

1. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся хотя бы два друга. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

2. В коллективе из 30 человек любых пятерых можно усадить за круглый стол таким образом, что каждый будет сидеть со своим знакомым. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, где каждый знаком с каждым.

3. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

4. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга; ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей; ...; ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.

5. 22 школьника участвовали в съезде юных писателей. После съезда каждый из них прочитал произведения трех юных писателей, побывавших на съезде. Докажите, что из делегатов съезда можно составить комиссию из четырех человек так, что в комиссии никто не читал произведения остальных ее членов.

6. В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

7. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

8. На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 83 доклада, сделанных его коллегами. Докажите, что найдутся четверо, каждому из которых понравились доклады трех других.

9. Некоторые города Графинии соединены дорогами. Из каждого города выходит не более n дорог, но среди каждых m городов есть два, соединенные дорогой, не проходящей через другие города. Какое наибольшее количество городов может быть в Графинии?

10. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

source:combinatorics/graph/mixture-g11.tex

Комбинаторный разнобой

1. Сколькими спообами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу из 24 человек?

2. Переплетчик должен переплести 15 различных книг в красный, зеленый, жёлтый и синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

3. 96 шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots, 32, 32, 32$ и разбросаны в 14 коробок таким образом, что в каждой коробке шарики с разными номерами. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные числа.

4. 15 волейбольных команд разыграли турнир по круговой системе, причем каждая команда одержала по 7 побед. Сколько окажется в турнире таких троек, команды которых во встречах между собой одержали по одной победе?

5. В Цветочном городе живет 2010 коротышек. У них имеется 1234 монеты по 10 копеек и неограниченный запас монет по 5 копеек. Иногда коротышки меняются монетами: один дает другому монету в 10 копеек и получает взамен две монеты по 5 копеек. Както вечером каждый коротышка заявил: «Сегодня я отдал ровно 10 монет». Докажите, что кто-то из них ошибся.

6. Кузнечик сидит в одной из вершин равностороннего треугольника. За один прыжок он может оказаться в любой из соседних вершин. Сколькими различными способами он может за 10 прыжков вернуться в начальную вершину?

7. Сколькими способами m птиц попарно различных видов можно рассадить по n клеткам попарно различных цветов, если в каждой клетке должны сидеть одна или две птицы?

8. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Сколько возможных различных маршрутов у улитки?

9. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее, чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки.

10. Посчитайте количество последовательностей длины $2n$, в которых по n раз встречаются числа 1 и -1, и все частичные суммы неотрицательны.

source:combinatorics/mixture-g11.tex

Взвешивания-1

1. Среди 29 разложенных в ряд монет имеется 3 фальшивые, причем известно, что они лежат подряд. Настоящие монеты имеют стандартный вес, а фальшивые — какой попало, но легче настоящей. За три взвешивания на рычажных весах выявите все три фальшивые монеты.

2. Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, — фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей. Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь. (Все фальшивые монеты весят одинаково.)

3. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

4. Антиквар приобрел 99 одинаковых по виду старинных монет. Ему сообщили, что ровно одна из монет — фальшивая — легче настоящих (а настоящие весят одинаково). Как, используя чашечные весы без гирь, за 7 взвешиваний выявить фальшивую монету, если антиквар не разрешает никакую монету взвешивать более двух раз?

5. Имеется 6 монет, из которых две — фальшивые, тяжелее настоящих на 0,1 грамма. Есть весы, которые реагируют только на разность весов на чашках, не меньшую 0,2 грамма. Как найти обе фальшивые монеты за четыре взвешивания?

6. Даны 8 гирек весом 1, 2, … , 8 граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

7. Имеется 40 монет, три из которых фальшивые, которые легче настоящих, но имеют одинаковые массы. За три взвешивания определите 18 настоящих монет.

8. Имеется 100 монет, четыре из которых фальшивые, которые легче настоящих, но имеют одинаковые массы. За два взвешивания определите 14 настоящих монет.

9. При изготовлении партии из $N \geqslant 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

10. Адвокат знает, что все 10 монет весят одинаково. Как ему убедить в этом судью, сделав не более трех взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Взвешивания-2

1. Имеется 101 монета. Среди них 100 настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета. Как это сделать при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

2. Имеется 7 монет, из которых две — фальшивые, весящие меньше настоящих. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

3. Имеется 6 монет, среди которых не более двух фальшивых, которые весят одинаково и легче настоящих. Как за 3 взвешивания определить все фальшивые монеты?

4. Имеется 5 золотых монет, из которых одна фальшивая легкая, и 5 серебряных монет, из которых одна фальшивая легкая. За три взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты. (Настоящая золотая и настоящая серебряная весят одинаково.)

5. Среди 21 внешне одинаковой монеты есть одна фальшивая, она легче остальных. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

6. Имеется три кучки по 2 монеты, в каждой из которых по одной настоящей и одной фальшивой. Известно, что все настоящие весят одинаково и что все фальшивые весят одинаково, причем фальшивые весят легче. За 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найдите все фальшивые монеты.

7. Из девяти монеток только одна настоящая, а остальные восемь — фальшивые. Четыре из фальшивых монет весят одинаково и легче настоящей, другие четыре тоже весят одинаково, но тяжелее настоящей. Найдите настоящую монету за шесть взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

8. Имеется 13 монет, из которых две — фальшивые, весящие меньше настоящих. За четыре взвешивания определите обе фальшивые монеты.

source:combinatorics/weighing-g11/2.tex